Métodos Matemáticos I
Sucesiones y series de funciones

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 11, 2012

Una **sucesión de funciones** *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n.

Una **sucesión de funciones** *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n.

Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n \mapsto f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una **sucesión de funciones** *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n.

Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n \mapsto f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones complejas definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Una **sucesión de funciones** *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n.

Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n \mapsto f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones complejas definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Como caso particular, conveniente para dar ejemplos, las funciones f_n podrán ser funciones reales definidas en un intervalo I.

Convergencia puntual

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Convergencia puntual

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Decimos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en un punto $z \in A$ si la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge.

Convergencia puntual

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Decimos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en un punto $z \in A$ si la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge.

El *campo de convergencia puntual* de la sucesión $\{f_n\}$ es el conjunto

$$C = \{z \in A : \{f_n(z)\} \text{ converge}\}$$

Convergencia puntual

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Decimos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en un punto $z \in A$ si la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge.

El *campo de convergencia puntual* de la sucesión $\{f_n\}$ es el conjunto

$$C = \{z \in A : \{f_n(z)\} \text{ converge}\}$$

La función *límite puntual* de la la sucesión $\{f_n\}$ es la función $f : C \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \lim\{f_n(z)\} \qquad (z \in C)$$

Para entender la definición de convergencia puntual es ***muy importante*** no confundir la *sucesión de funciones* $\{f_n\}$ con la *sucesión de números complejos* $\{f_n(z)\}$ obtenida *evaluando las funciones* de dicha sucesión en un número $z \in A$.

Para entender la definición de convergencia puntual es ***muy importante*** no confundir la *sucesión de funciones* $\{f_n\}$ con la *sucesión de números complejos* $\{f_n(z)\}$ obtenida *evaluando las funciones* de dicha sucesión en un número $z \in A$.

Tampoco debes olvidar que en una sucesión la variable es siempre $n \in \mathbb{N}$ y nunca $z \in A$. Así, la sucesión $\{f_n(z)\}$ es la aplicación que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ (la variable) le asigna el número real $f_n(z)$ ***donde*** z ***está fijo***.

La función límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede no ser continua.

La función límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede no ser continua.

Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

Las funciones f_n son continuas.

La función límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede no ser continua.

Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

Las funciones f_n son continuas.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |x| = 1; \\ 1, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Es una función discontinua.

$$0 = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f_n(x) = \frac{1}{2}$$

En general, la convergencia puntual no permite permutar límites:

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

La convergencia puntual no permite permutar la integración con el límite.

La convergencia puntual no permite permutar la integración con el límite.

Es decir, en general no se verifica la igualdad:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

La convergencia puntual no permite permutar la integración con el límite.

Es decir, en general no se verifica la igualdad:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$$

La función límite puntual viene dada para todo $x \in [0,1]$ por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$$

Tenemos que:

$$0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n) = \frac{\pi}{2}$$

Convergencia uniforme

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a una función f en un conjunto $B \subseteq A$ si

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\} = 0$$

Convergencia uniforme

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a una función f en un conjunto $B \subseteq A$ si

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\} = 0$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ ***para todo*** $z \in B$.

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;
- La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge a $f(z)$.

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

• Fijas un $z \in B$;
• La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge a $f(z)$.Es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$.

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;
- La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$

converge a $f(z)$.Es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** z porque si cambias z por otro punto $w \in C$ la sucesión $\{f_n(w)\}$ es distinta de $\{f_n(z)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;
- La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$

converge a $f(z)$.Es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** z porque si cambias z por otro punto $w \in C$ la sucesión $\{f_n(w)\}$ es distinta de $\{f_n(z)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

$\{f_n\}$ converge a f uniformemente en B significa que:

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;
- La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge a $f(z)$.Es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** z porque si cambias z por otro punto $w \in C$ la sucesión $\{f_n(w)\}$ es distinta de $\{f_n(z)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

$\{f_n\}$ converge a f uniformemente en B significa que:

- Fijas un $\varepsilon > 0$;

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;
- La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge a $f(z)$.Es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$.

Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** z porque si cambias z por otro punto $w \in C$ la sucesión $\{f_n(w)\}$ es distinta de $\{f_n(z)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

$\{f_n\}$ converge a f uniformemente en B significa que:

- Fijas un $\varepsilon > 0$;
- Existe un número natural n_0 (que dependerá de ε) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ **para todo** $z \in B$.

$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en B significa que:

- Fijas un $z \in B$;
- La correspondiente sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge a $f(z)$.Es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** z porque si cambias z por otro punto $w \in C$ la sucesión $\{f_n(w)\}$ es distinta de $\{f_n(z)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

$\{f_n\}$ converge a f uniformemente en B significa que:

- Fijas un $\varepsilon > 0$;
- Existe un número natural n_0 (que dependerá de ε) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ **para todo** $z \in B$. Es decir, en la convergencia uniforme, hay un mismo número n_0 que es válido simultáneamente para todos los $z \in B$.

- *La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto*. No tiene sentido decir que *“la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente”* si no se indica inmediatamente a continuación el conjunto en el que afirmamos que hay convergencia uniforme.

- *La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto*. No tiene sentido decir que *"la sucesión* $\{f_n\}$ *converge uniformemente"* si no se indica inmediatamente a continuación el conjunto en el que afirmamos que hay convergencia uniforme.

- No existe *"el campo de convergencia uniforme"*. Es decir, el concepto de *campo de convergencia puntual* no tiene un análogo para la convergencia uniforme. La razón es que no tiene por qué existir un *más grande* conjunto en el que haya convergencia uniforme.

Conservación de la continuidad por convergencia uniforme.

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto B. Sea $a \in B$ y supongamos que las funciones f_n son todas ellas continuas en a. Se verifica entonces que la función f es continua en a. En particular, si las funciones f_n son todas ellas continuas en B. Se verifica entonces que la función f es continua en B.

Conservación de la continuidad por convergencia uniforme.

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto B. Sea $a \in B$ y supongamos que las funciones f_n son todas ellas continuas en a. Se verifica entonces que la función f es continua en a. En particular, si las funciones f_n son todas ellas continuas en B. Se verifica entonces que la función f es continua en B.

Permutación de la integración con el límite uniforme.

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un intervalo $[a, b]$ y que las funciones f_n son todas ellas continuas en $[a, b]$. Se verifica entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en B si, y sólo si, verifica uniformemente en B la condición de Cauchy:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ p, q \geqslant n_0 \Rightarrow \sup\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in B\} \leqslant \varepsilon$$

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1,$$

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1,\ F_2 = f_1 + f_2,$$

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1, \; F_2 = f_1 + f_2, \; F_3 = f_1 + f_2 + f_3, \; \dots,$$

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1,\ F_2 = f_1 + f_2,\ F_3 = f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots, F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \cdots$$

La sucesión de funciones, $\{F_n\}$, así obtenida se llama *serie de término general* f_n y la representamos por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ o, más sencillamente, $\sum f_n$.

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1,\ F_2 = f_1 + f_2,\ F_3 = f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots, F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \cdots$$

La sucesión de funciones, $\{F_n\}$, así obtenida se llama *serie de término general* f_n y la representamos por $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ o, más sencillamente, $\sum f_n$.

Puesto que las series de funciones son sucesiones de funciones, los conceptos de convergencia puntual, campo de convergencia puntual y convergencia uniforme para series de funciones no precisan de nueva definición.

Condición necesaria de convergencia

Condición necesaria para que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converja puntualmente (resp. uniformemente) en un conjunto A es que la sucesión $\{f_n\}$ converja puntualmente (resp. uniformemente) a cero en A.

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ se dice que *converge absolutamente* en un punto $a \in A$ cuando la serie de los módulos, $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(a)|$, converge.

Se define el *campo de convergencia absoluta* como el conjunto

$$\left\{ z \in A : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(z)| \ \text{converge} \right\}$$

Convergencia absoluta

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ se dice que *converge absolutamente* en un punto $a \in A$ cuando la serie de los módulos, $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(a)|$, converge.

Se define el *campo de convergencia absoluta* como el conjunto

$$\left\{z \in A : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(z)| \ \text{converge}\right\}$$

Al igual que para series de números complejos la convergencia

absoluta de una serie de funciones implica convergencia pero no al contrario.

Criterio de Weierstrass.

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$.
Supongamos que hay una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales positivos tal que:

- $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ para todo $z \in A$.

Criterio de Weierstrass.

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$.
Supongamos que hay una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales positivos tal que:

- $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ para todo $z \in A$.
- La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente.

Criterio de Weierstrass.

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$.
Supongamos que hay una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales positivos tal que:

- $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ para todo $z \in A$.
- La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente.

Criterio de Weierstrass.

Sea $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$.
Supongamos que hay una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales positivos tal que:

- $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ para todo $z \in A$.
- La serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente.

Entonces $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente y uniformemente en A.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Entonces $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. Supongamos que:

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Entonces $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. Supongamos que:

- $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Para cada $z \in A$ $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Entonces $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. Supongamos que:

- $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Para cada $z \in A$ $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Criterio de Dirichlet. Supongamos que:

- $\{a_n\}$ es monótona y convergente a cero.
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. Supongamos que:

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Para cada $z \in A$ $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A.

Entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Dados una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a \in \mathbb{C}$, consideremos la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} f_0(z) &= c_0 \\ f_n(z) &= c_n(z-a)^n \qquad n \geqslant 1 \end{aligned}$$

Dados una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a \in \mathbb{C}$, consideremos la sucesión de funciones

$$f_0(z) = c_0$$
$$f_n(z) = c_n(z-a)^n \qquad n \geqslant 1$$

La serie definida por esta sucesión de funciones, es decir, la sucesión

$$\left\{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n\right\}$$

se representa por

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$$

y se llama *serie de potencias centrada en a*.

Dados una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a \in \mathbb{C}$, consideremos la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} f_0(z) &= c_0 \\ f_n(z) &= c_n(z-a)^n \qquad n \geqslant 1 \end{aligned}$$

La serie definida por esta sucesión de funciones, es decir, la sucesión

$$\left\{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n\right\}$$

se representa por

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$$

y se llama *serie de potencias centrada en a*.

La sucesión $\{c_n\}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie.

Lema de Abel

Sea $\rho > 0$ un número positivo tal que la sucesión $\{c_n \rho^n\}$ está acotada.

Entonces se verifica que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$:

Lema de Abel

Sea $\rho > 0$ un número positivo tal que la sucesión $\{c_n \rho^n\}$ está acotada.

Entonces se verifica que la serie $\sum_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$:

- Converge absolutamente en el disco $D(a, \rho)$ y

Lema de Abel

Sea $\rho > 0$ un número positivo tal que la sucesión $\{c_n \rho^n\}$ está acotada.

Entonces se verifica que la serie $\sum_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$:

- Converge absolutamente en el disco $D(a, \rho)$ y
- Converge uniformemente en compactos $K \subseteq D(a, \rho)$.

Radio de convergencia

Dada una serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ definimos:

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \{c_n\rho^n\} \text{ está acotada}\}, \qquad R = \sup(A) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

- $R = 0$. En este caso se dice que *la serie de potencias es trivial* pues solamente converge para $z = a$.

Radio de convergencia

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ definimos:

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \{c_n\rho^n\} \text{ está acotada}\}, \quad R = \sup(A) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

- $R = 0$. En este caso se dice que *la serie de potencias es trivial* pues solamente converge para $z = a$.
- $0 < R < +\infty$. La serie converge absolutamente en $D(a, R)$ y converge uniformemente en compactos contenidos en dicho disco.
  Si $|z-a| > R$ entonces la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}$ no está acotada y, por tanto, la serie no converge.
  Nada puede afirmarse en general del comportamiento de la serie en la frontera del disco $D(a, R)$.

Radio de convergencia

Dada una serie de potencias $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$ definimos:

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \{c_n \rho^n\} \text{ está acotada}\}, \quad R = \sup(A) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

- $R = 0$. En este caso se dice que *la serie de potencias es trivial* pues solamente converge para $z = a$.
- $0 < R < +\infty$. La serie converge absolutamente en $D(a, R)$ y converge uniformemente en compactos contenidos en dicho disco.
  Si $|z - a| > R$ entonces la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}$ no está acotada y, por tanto, la serie no converge.
  Nada puede afirmarse en general del comportamiento de la serie en la frontera del disco $D(a, R)$.
- $R = +\infty$. La serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en compactos.

Radio de convergencia

Al número R se le llama **radio de convergencia** de la serie.

Radio de convergencia

Al número R se le llama **radio de convergencia** de la serie.

Observa que R sólo depende de la sucesión $\{c_n\}$ de coeficientes de la serie y no del centro de la serie.

Radio de convergencia

Al número R se le llama **radio de convergencia** de la serie.

Observa que R sólo depende de la sucesión $\{c_n\}$ de coeficientes de la serie y no del centro de la serie.

Dada una serie de potencias no trivial, $\sum c_n(z-a)^n$, llamaremos ***dominio de convergencia de la serie*** al conjunto $D(a, R)$ donde R es el radio de convergencia de la serie (recuerda que si $R = +\infty$ entonces $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$).

Cálculo del radio de convergencia

Dada una sdp $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ supongamos que se verifica alguna de las condiciones:

Cálculo del radio de convergencia

Dada una sdp $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ supongamos que se verifica alguna de las condiciones:

Criterio del cociente o de D'Alembert

$$\lim \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Cálculo del radio de convergencia

Dada una sdp $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ supongamos que se verifica alguna de las condiciones:

Criterio del cociente o de D'Alembert

$$\lim \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Criterio de la raíz o de Cauchy

$$\lim\{\sqrt[n]{|c_n|}\} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Cálculo del radio de convergencia

Dada una sdp $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ supongamos que se verifica alguna de las condiciones:

Criterio del cociente o de D'Alembert

$$\lim \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Criterio de la raíz o de Cauchy

$$\lim\{\sqrt[n]{|c_n|}\} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Entonces $R = 1/L$ ($R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$).

Cálculo del radio de convergencia

Dada una sdp $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ supongamos que se verifica alguna de las condiciones:

Criterio del cociente o de D'Alembert

$$\lim \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Criterio de la raíz o de Cauchy

$$\lim\{\sqrt[n]{|c_n|}\} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Entonces $R = 1/L$ ($R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$).

Fórmula de Cauchy–Hadamard

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, Ω su dominio de convergencia y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ la función suma de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad z\in\Omega$$

Entonces:

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, Ω su dominio de convergencia y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ la función suma de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad z\in\Omega$$

Entonces:

- f es indefinidamente derivable en Ω.

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, Ω su dominio de convergencia y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ la función suma de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad z\in\Omega$$

Entonces:

- f es indefinidamente derivable en Ω.
- La derivada k-ésima de f se obtiene derivando k veces la serie término a término:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \qquad z\in\Omega$$

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, Ω su dominio de convergencia y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ la función suma de la serie:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad z\in\Omega$$

Entonces:

- f es indefinidamente derivable en Ω.
- La derivada k-ésima de f se obtiene derivando k veces la serie término a término:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \qquad z\in\Omega$$

- En particular $f^{(k)}(a)=k!\,c_k$ o, lo que es lo mismo

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \text{para todo } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Sea f una función indefinidamente derivable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$. La serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

se llama **serie de Taylor** de f en el punto a.

Las series de potencias no triviales son series de Taylor (de su función suma).

Funciones analíticas

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica en Ω cuando para cada punto $b \in \Omega$ hay un disco abierto $D(b, \rho_b) \subset \Omega$ y una serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} c_n^{(b)} (z - b)^n$$

cuyo dominio de convergencia contiene a $D(b, \rho_b)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)} (z - b)^n \qquad \text{para todo } z \in D(b, \rho_b)$$

Funciones analíticas

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica en Ω cuando para cada punto $b \in \Omega$ hay un disco abierto $D(b, \rho_b) \subset \Omega$ y una serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} c_n^{(b)} (z - b)^n$$

cuyo dominio de convergencia contiene a $D(b, \rho_b)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)} (z - b)^n \qquad \text{para todo } z \in D(b, \rho_b)$$

Una función analítica f en Ω es indefinidamente derivable en Ω y todas sus derivadas son también analíticas. Además se tiene que

$$c_n^{(b)} = \frac{f^{(n}(b)}{n!}$$

Continuidad radial

Sea $\sum c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R < +\infty$ y $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ la función suma de la serie.

Continuidad radial

Sea $\sum c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R < +\infty$ y $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ la función suma de la serie.

Supongamos que la serie es convergente en un punto z_0 de la frontera del disco $D(0, R)$.

Sea $\sum c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R < +\infty$ y $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ la función suma de la serie.

Supongamos que la serie es convergente en un punto z_0 de la frontera del disco $D(0,R)$.

Entonces se verifica que:

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ 0<r<1}} f(rz_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$